ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 135

Α2. ***α.*** Ψ

β. Δίνεται αντιπαράδειγμα στο σχολικό βιβλίο σελίδα 99, παράγραφος: *«Παράγωγος και συνέχεια».*

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 73

Α4.

α. Λάθος
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Σωστό
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση $f \circ g$ ορίζεται για $\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x(1-x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \in (0,1) \end{cases}$

Άρα για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$.

Β2. Έστω $x_1,\ x_2 \in D_h$ με

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \ln\left(\frac{x_1}{1-x_1}\right) = \ln\left(\frac{x_2}{1-x_2}\right) \overset{1-1}{\Rightarrow} \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \Rightarrow x_1(1-x_2) = x_2(1-x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η h είναι 1 – 1, δηλαδή αντιστρέφεται.

Για να βρούμε την αντίστροφη h^{-1} θέτουμε

$$y = h(x) \Rightarrow y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Rightarrow e^y = \frac{x}{1-x} \Rightarrow e^y(1-x) = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^y - xe^y = x \Rightarrow x + xe^y = e^y \Rightarrow x(1+e^y) = e^y \overset{1+e^y \neq 0}{\Rightarrow} x = \frac{e^y}{1+e^y} \Rightarrow h^{-1}(y) = \frac{e^y}{1+e^y}$$

Οπότε είναι $h^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ με $x \in \mathbb{R}$.

Β3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

Η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με

$$\varphi'(x) = \frac{(e^x)' \cdot (1+e^x) - e^x \cdot (1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(1+e^x-e^x)}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Ακόμη η φ' είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\varphi''(x) = \frac{e^x \cdot (1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1+e^x)(1+e^x-2e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

Είναι

- $\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$
- $\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$
- $\varphi''(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} < 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$		Σ.Κ.	

Άρα η φ είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$. Με σημείο καμπής το $A(0, \varphi(0))$ δηλαδή το $A\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

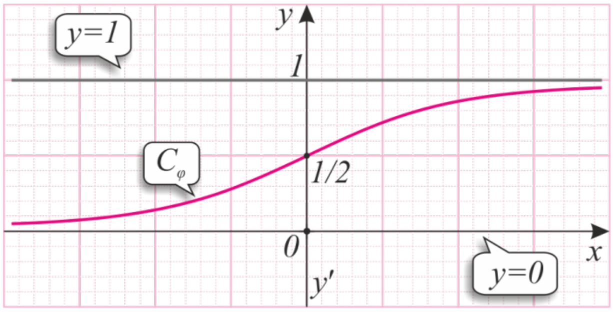
Β4. Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{0}{1+0} = 0$.

Οπότε η C_φ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = 0$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} \overset{\text{D.L.H.}}{\underset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=\!=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$.

Οπότε η C_φ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 1$.

Η γραφική παράσταση της φ είναι η ακόλουθη.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x\in[0,\pi]$ είναι $f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x$.

Έστω $M(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο Μ έχει εξίσωση

$$(\varepsilon):\ y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\cdot(x-x_0)$$

Επειδή το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$ ανήκει στην (ε) τότε

$$-\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x_0\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)+\eta\mu x_0-\frac{\pi}{2}=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\sigma\upsilon\nu x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\eta\mu x-\frac{\pi}{2}$ με $x\in[0,\pi]$

Η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με

$$g'(x)=-\eta\mu x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Θέτω $g'(x)=0\Rightarrow \eta\mu x\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\eta\mu x=0\\ \text{ή}\\ x-\frac{\pi}{2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\ \text{ ή }\ x=\pi\\ \text{ή}\\ x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

Το πρόσημο της παραγώγου και η μονοτονία της g φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0		$\pi/2$		π	$+\infty$
$\eta\mu x$		0	$+$		$+$	0	
$x-\frac{\pi}{2}$			$-$	0	$+$		
$g'(x)$		0	$-$	0	$+$	0	
$g(x)$		Τ.Μ.	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	Τ.Μ.	

Οπότε η g παρουσιάζει:

- ολικό ελάχιστο στο $x=\frac{\pi}{2}$ το $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi}{2}<0$,

- τοπικό μέγιστο στο $x=0$ το $g(0)=0$
- και τοπικό μέγιστο στο $x=\pi$ το $g(\pi)=0$

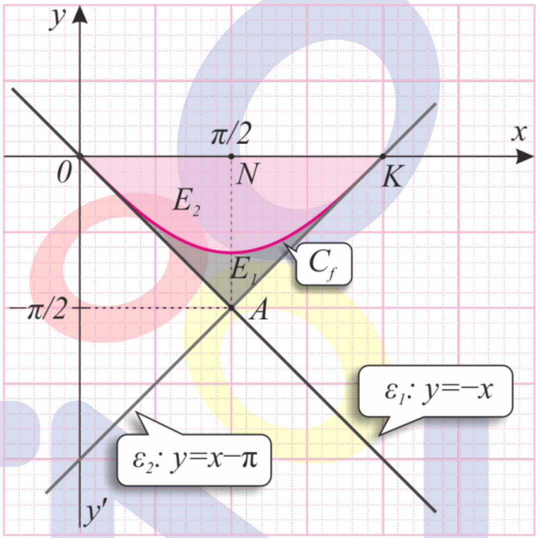
Άρα για $0<x<\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow g(0)>g(x) \Leftrightarrow g(x)<0$ και για $\frac{\pi}{2}<x<\pi \Leftrightarrow g(x)<g(\pi) \Leftrightarrow g(x)<0$.

Οπότε $g(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$, συνεπώς η $g(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες τις $x=0$ και $x=\pi$.

Επομένως η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο εφαπτομένες που άγονται από το A, τις

$$(\varepsilon_1): y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y=-x \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): y-f(\pi)=f'(\pi)(x-\pi) \Leftrightarrow y=x-\pi.$$

Γ2. Η γραφική παράσταση της f και οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα είναι:

$$E_2=\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\pi}|-\eta\mu x|dx=\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=[-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}=1+1=2$$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΑ είναι $(OKA)=\frac{(OK)\cdot(NA)}{2}=\frac{\pi\cdot\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi^2}{4}$.

Οπότε είναι $E_1=(OKA)-E_2=\frac{\pi^2}{4}-2$

Επομένως $\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2}=\frac{\pi^2}{8}-1$.

Γ3. Είναι $f''(x)=\eta\mu x>0$ για κάθε $x\in(0,\pi)$.

Άρα η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$ οπότε κάθε εφαπτομένη της C_f βρίσκεται κάτω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Αφού η (ε_1) εφαπτομένη της C_f στο $x=0$ τότε $f(x)\geq -x$, με την ισότητα να ισχύει για $x=0$.

Επίσης η (ε_2) εφαπτομένη της C_f στο $x=\pi$ οπότε $f(x)\geq x-\pi$, με την ισότητα να ισχύει για $x=\pi$.

Άρα $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi^-}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi^-}\left[\dfrac{1}{f(x)-x+\pi}\cdot(f(x)+x)\right]=(+\infty)\cdot\pi=+\infty$,

διότι $f(x)-x+\pi>0$ κοντά στο π και $\lim\limits_{x\to\pi^-}(f(x)-x+\pi)=0$.

Γ4. Για κάθε $x\in[1,e]$ ισχύει $f(x)\geq x-\pi \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}\geq 1-\dfrac{\pi}{x}$ (με την ισότητα να ισχύει για $x=\pi$).

Άρα $\displaystyle\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx \Leftrightarrow \int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>[x-\pi\ln x]_1^e \Leftrightarrow \int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>e-\pi-1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για $x\in[-1,0)$ και $x\in(0,\pi]$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών. Ελέγχω ως προς την συνέχεια στο $x_0=0$.

Είναι

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$
- $f(0)=0$

Άρα η f είναι συνεχής και στο $x_0=0$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $[-1,\pi]$.

- Για $x<0$ είναι $f(x)=\left(x^4\right)^{\frac{1}{3}}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x)=\dfrac{1}{3}\left(x^4\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 4x^3<0$ για κάθε $x\in(-1,0)$. Άρα η f δεν παρουσιάζει κρίσιμο σημείο στο διάστημα αυτό.

- Για $x>0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με
$$f'(x)=e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$$
Είναι $f'(x)=0\Rightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0\Rightarrow \varepsilon\varphi x=-1\Rightarrow x=\kappa\pi-\dfrac{\pi}{4},\ \kappa\in\mathbb{Z}$.

  Όμως $x\in(0,\pi]$ άρα $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

  Οπότε η f παρουσιάζει κρίσιμο σημείο στο $x=\dfrac{3\pi}{4}$

Ελέγχω αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Για $x<0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x}=-\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-x}=-\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)^{\frac{1}{3}}=0$.

Για $x>0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x ημx}{x}=1$.

Άρα η f δεν παραγωγίζεται στο $x=0$, δηλαδή παρουσιάζει κρίσιμο σημείο στο $x=0$.

Δ2. Για $x\in(-1,0)$ είναι $f'(x)<0$

x	$-\infty$	-1		0		$3\pi/4$		π	$+\infty$
$f'(x)$			$-$		$+$	0	$-$		
$f(x)$		Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	

Αφού $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$ και η f' συνεχής, τότε η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$. Όμως $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}>0$ οπότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$

Ομοίως η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$ και αφού $f'\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=e^{\frac{5\pi}{6}}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)<0$ τότε $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$.

Η f παρουσιάζει:

- τοπικό μέγιστο στο $x=-1$ το $f(-1)=1$,
- τοπικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$,
- τοπικό μέγιστο στο $x=\dfrac{3\pi}{4}$ το $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}ημ\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$,
- τοπικό ελάχιστο στο $x=\pi$ το $f(\pi)=0$

Έστω $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\leq 1\Leftrightarrow \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\ln e^{\frac{3\pi}{4}}\leq 0\Leftrightarrow \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\pi}{4}\leq 0\Leftrightarrow \ln 2^{\frac{1}{2}}-\ln 2+\dfrac{3\pi}{4}\leq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{3\pi}{4}\leq 0\Leftrightarrow -\ln 2+\dfrac{3\pi}{2}\leq 0$, το οποίο είναι άτοπο, άρα $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}>1$.

Οπότε η μέγιστη τιμή της f είναι $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$ και ελάχιστη τιμή $f(0)=f(\pi)=0$

Άρα

- στο $\Delta_1=[-1,0]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής οπότε

$$f(\Delta_1)=[f(0),f(-1)]=[0,1]$$

- στο $\Delta_2=\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής οπότε

$$f(\Delta_2)=\left[f(0),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\right],$$

- στο $\Delta_3=\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής οπότε

$$f(\Delta_3)=\left[f(\pi),f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $f([-1,\pi])=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$.

Δ3. Είναι $E=\int_0^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\pi}\left|e^x\eta\mu x-e^{5x}\right|dx$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x\eta\mu x-e^{5x}=e^x\left(\eta\mu x-e^{4x}\right)$ με $x\in[0,\pi]$.

Για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει ότι

- $0\le\eta\mu x\le 1$, (1)
- $x\ge 0\Leftrightarrow e^{4x}\ge e^0\Leftrightarrow e^{4x}\ge 1\Leftrightarrow -e^{4x}\le -1$, (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\eta\mu x-e^{4x}\le 0$.

Άρα $E=\int_0^{\pi}\left(e^{5x}-e^x\eta\mu x\right)dx=\int_0^{\pi}e^{5x}dx-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx$, (3).

Θέτω $I=\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=\int_0^{\pi}\left(e^x\right)'\cdot\eta\mu x dx=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sigma\upsilon\nu x dx=0-\int_0^{\pi}\left(e^x\right)'\cdot\sigma\upsilon\nu x dx=$

$$=-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=e^{\pi}+1-I$$

Άρα $I=e^{\pi}+1-I\Leftrightarrow 2I=e^{\pi}+1\Leftrightarrow I=\frac{e^{\pi}+1}{2}$

Οπότε από την (3) είναι $E=\frac{e^{5\pi}}{5}-\frac{1}{5}-\frac{e^{\pi}+1}{2}$ τ.μ.

Δ4. Είναι $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\Leftrightarrow 16f(x)-(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\overset{:16}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow f(x)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow f(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(f(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\right)+\left(-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\right)=0 \qquad (4)$$

Όμως από το σύνολο τιμών της f είναι $f(x)\le\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow f(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\le 0$ για κάθε $x\in[-1,\pi]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=\frac{3\pi}{4}$.

Επίσης $-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οπότε για να ισχύει η (4) θα πρέπει $\begin{cases} f(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}=0 \\ \text{και} \\ x=\frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3\pi}{4} \\ \text{και} \\ x=\frac{3\pi}{4} \end{cases}$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x=\frac{3\pi}{4}$.