ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2018

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 99

Α2. *α)* Ψ
β) Αντιπαράδειγμα, σελίδα 35

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 216

Α4. *α)* Λάθος
β) Λάθος
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=1+\frac{4\cdot 2x}{x^4}=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}$$

Λύνω $f'(x)=0\Rightarrow \frac{x^3+8}{x^3}=0\Rightarrow x^3+8=0\Rightarrow x^3=-8\Rightarrow x=-2$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^3+8		$-$	0	$+$	‖	$+$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		↗	τ.μ.	↘	‖	↗	

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα η f:

- είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$ και στο $(0,+\infty)$
- είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$ και
- παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-2$ το $f(-2)=-2-1=-3$.

Β2. Για $x\neq 0$ είναι $f''(x)=\frac{3x^2\cdot x^3-(x^3+8)\cdot 3x^2}{(x^3)^2}=\frac{3x^5-3x^5-24x^2}{x^6}=\frac{-24x^2}{x^6}=-\frac{24}{x^4}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Άρα η f είναι κοίλη στα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

B3. Κατακόρυφη ασύμπτωτη αναζητούμε στο 0. Δηλαδή

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x-\frac{4}{x^2}\right) = -\infty \text{ και } \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right) = -\infty .$$

Άρα η ευθεία $x=0$ (δηλαδή ο άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f.

Πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες αναζητούμε στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^3}\right) = 1 = \lambda$

και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\cancel{x}-\dfrac{4}{x^2}-\cancel{x}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right) = 0 = \beta$

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^3}\right) = 1 = \lambda$

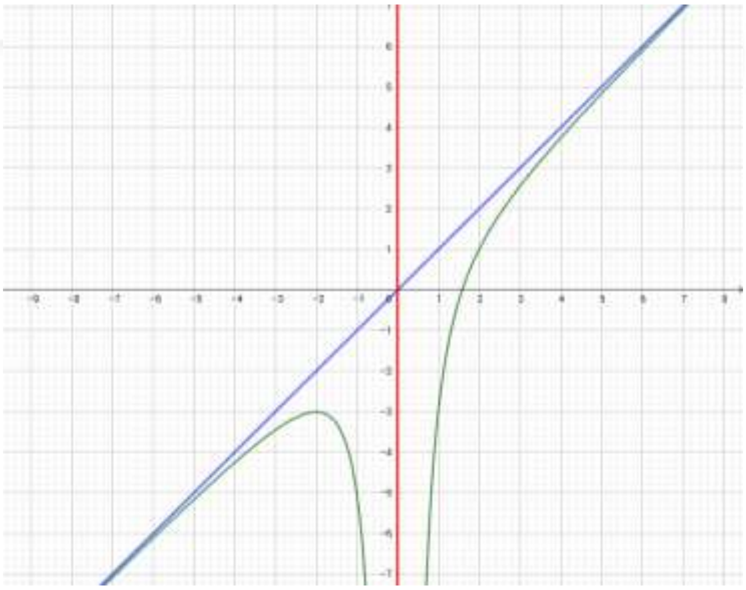
και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cancel{x}-\dfrac{4}{x^2}-\cancel{x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right) = 0 = \beta$

Οπότε η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

B4. Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μεταβολών.

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$		↗		↘	‖	↗	

Οπότε η γραφική παράσταση της f είναι η ακόλουθη



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η πλευρά του τετραγώνου θα έχει μήκος $\frac{x}{4}m$ και το μήκος του κύκλου θα είναι $(8-x)m$, οπότε ο κύκλος θα έχει ακτίνα $\frac{8-x}{2\pi}m$.

Άρα, το εμβαδόν του τετραγώνου είναι $E_\tau = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}m^2$.

Και το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο με $E_\kappa = \pi\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{4\pi}m^2$

Οπότε, το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι:

$$E(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(8-x)^2}{4\pi} = \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \text{ με } 0<x<8$$

Γ2. Η $E(x)$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $(0,8)$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό με: $E'(x) = \frac{2(\pi+4)x-64}{16\pi}$

Λύνω την $E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{32}{\pi+4}$

Το πρόσημο της $E'(x)$ και η μονοτονία της $E(x)$ φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα τιμών:

x	$-\infty$	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8	$+\infty$
$E'(x)$			$-$	0	$+$		
$E(x)$			$\searrow$	τ.ελ.	$\nearrow$		

Άρα, το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων γίνεται ελάχιστο για $x = \frac{32}{\pi+4}$, που είναι η πλευρά του τετραγώνου όταν ισούται με την διάμετρο του κύκλου αφού:

$$\frac{x}{4} = 2\frac{8-x}{2\pi} \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4}$$

Γ3. Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική λύση για $x \in (0,8)$.

Η $E(x)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right)$ οπότε

$$E(\Delta_1) = \left(\lim_{x\to\frac{32}{\pi+4}^-} E(x), \lim_{x\to 0^+} E(x)\right) = \left(\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi}\right)$$

Η $E(x)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$ οπότε

$$E(\Delta_2)=\left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to 8^-}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},4\right)$$

Αφού το $5\in E(\Delta_1)$ τότε η εξίσωση $E(x)=5$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο Δ_1, η οποία είναι μοναδική αφού $E(x)$ γνησίως φθίνουσα στο Δ_1.

Τέλος το $5\notin E(\Delta_2)$ άρα η εξίσωση $E(x)=5$ είναι αδύνατη στο Δ_2.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$f'(x)=2e^{x-\alpha}-2x \text{ και } f''(x)=2e^{x-\alpha}-2.$$

Λύνω την $f''(x)\geq 0\Rightarrow 2e^{x-\alpha}-2\geq 0\Rightarrow e^{x-\alpha}\geq 1\Rightarrow x-\alpha\geq 0\Rightarrow x\geq\alpha$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Άρα η f παρουσιάζει μοναδικό σημείο καμπής στο $A(\alpha,f(\alpha))$.

Δ2. Είναι

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^{x-\alpha}-2x\right)=+\infty$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^{x-\alpha}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}[e^x\left(\dfrac{2}{e^\alpha}-\dfrac{2x}{e^x}\right)=(+\infty)\left(\dfrac{2}{e^\alpha}-0\right)=+\infty$, διότι

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=\!=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα προσήμων της f'', προκύπτει ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\alpha]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$.

Στο $\Delta_1=(-\infty,\alpha]$ η f' είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής οπότε

$$f'(\Delta_1)=\left[f'(\alpha),\lim_{x\to-\infty}f'(x)\right)=[2-2\alpha,+\infty).$$

Στο $\Delta_2=(\alpha,+\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, οπότε

$$f'(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to\alpha^+}f'(x),\lim_{x\to+\infty}f'(x)\right)=(2-2\alpha,+\infty).$$

Αφού $2-2\alpha=2(1-\alpha)<0$ προκύπτει ότι:

- $0\in f'(\Delta_1)$ οπότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_1\in\Delta_1$, η οποία είναι μοναδική αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1.
- $0\in f'(\Delta_2)$ οπότε η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_2\in\Delta_2$, η οποία είναι μοναδική αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2.

Σύμφωνα με τα παραπάνω

- για $x<x_1 \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_1)\Rightarrow f'(x)>0$,
- για $x_1<x<\alpha \overset{f'\searrow}{\Rightarrow} f'(x_1)>f'(x)\Rightarrow f'(x)<0$,
- για $\alpha<x<x_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x_2)\Rightarrow f'(x)<0$,
- για $x>x_2 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(x_2)\Rightarrow f'(x)>0$.

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	τ.μ.		$\searrow$		τ.ελ.	$\nearrow$	

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=x_1$ και τοπικό ελάχιστο στο $x=x_2$.

Δ3.

1ος τρόπος

Επειδή, $\alpha>1 \Leftrightarrow 1-\alpha<0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha}<1$, τότε προκύπτει ότι $f'(1)=2e^{1-\alpha}-2=2(e^{1-\alpha}-1)<0$.
Άρα, $1\in(x_1,x_2)$ και επειδή $\alpha>1$, προκύπτει ότι $x_1<1<\alpha<x_2$.
Έστω ότι η εξίσωση $f(x)=f(1)$ έχει ρίζα στο (α,x_2), δηλαδή υπάρχει $\rho\in(\alpha,x_2)$ τέτοιο ώστε $f(\rho)=f(1)$

Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,x_2]$ τότε η f είναι «1–1» οπότε $f(\rho)=f(1)\overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow}\rho=1$, το οποίο είναι άτοπο αφού $\rho\in(\alpha,x_2)$ και $\alpha>1$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο (α,x_2).

2ος τρόπος

Επειδή, $\alpha>1 \Leftrightarrow 1-\alpha<0 \Leftrightarrow e^{1-\alpha}<1$, τότε προκύπτει ότι $f'(1)=2e^{1-\alpha}-2=2(e^{1-\alpha}-1)<0$.
Άρα, $1\in(x_1,x_2)$ και επειδή $\alpha>1$, προκύπτει ότι $x_1<1<\alpha<x_2$.
Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (x_1,x_2) τότε η f είναι «1–1» οπότε η εξίσωση $f(x)=f(1)$ έχει μοναδική λύση τη $x=1$ στο (x_1,x_2). Όμως $1\in(x_1,\alpha)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο διάστημα (α,x_2).

3ος τρόπος

Έστω ότι υπάρχει $x_o \in (\alpha, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = f(1)$. Η f είναι συνεχής στο $[1, x_o]$, παραγωγίσιμη στο $(1, x_0)$ και $f(x_o) = f(1)$. Από το Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x_o) \subset (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, το οποίο είναι άτοπο διότι η f' μηδενίζεται μόνο στα x_1, x_2.

Άρα, η εξίσωση $f(x) = f(1)$ είναι αδύνατη στο (α, x_2).

Δ4. Για $\alpha = 2$: $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$ και $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 2$ είναι η

$$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y + 2 = -2(x-2) \Rightarrow y = -2x + 2$$

Αφού η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$ τότε η εξίσωση της εφαπτομένης βρίσκεται κάτω από την C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής, δηλαδή $f(x) \geq y \Rightarrow f(x) \geq -2x + 2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 2$.

Άρα για $x \geq 2$ είναι $f(x) \geq -2x + 2 \overset{\cdot\sqrt{x-2}\geq 0}{\Leftrightarrow} f(x)\cdot\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2}$.

Αφού οι συναρτήσεις $f(x)\cdot\sqrt{x-2}$ και $(-2x+2)\sqrt{x-2}$ είναι συνεχείς στο $[2, +\infty)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 2$, τότε

$$\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx.$$

Για το $\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx$ θέτω $\sqrt{x-2} = u \Leftrightarrow x - 2 = u^2$

Τότε $dx = 2u\,du$ και

- για $x = 2$ είναι $u = 0$,
- για $x = 3$ είναι $u = 1$.

Άρα,

$$\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx = \int_0^1 \left[-2\left(u^2+2\right)+2\right]u\cdot 2u\,du = \int_0^1 \left(-2u^2-2\right)2u^2\,du =$$

$$= \int_0^1 \left(-4u^4 - 4u^2\right)du = \left[-4\cdot\frac{u^5}{5} - 4\cdot\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{12}{15} - \frac{20}{15} = -\frac{32}{15}$$

Επομένως $\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx > -\dfrac{32}{15}$.