ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2018

ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Σελίδα 65 σχολικού βιβλίου

β. Σελίδα 65 σχολικού βιβλίου

γ. Σελίδα 65 σχολικού βιβλίου

Α2. Σελίδα 22 σχολικού βιβλίου

Α3. α. Σωστό, ***β.*** Λάθος, ***γ.*** Λάθος, ***δ.*** Σωστό, ***ε.*** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού οι παρατηρήσεις είναι συνολικά 5, τότε ως διάμεσος ορίζεται η μεσαία παρατήρηση, δηλαδή η τρίτη παρατήρηση. Αφού κάτω από το 15 είναι οι παρατηρήσεις 12 και 14 και πάνω από το 15 είναι οι παρατηρήσεις 16 και 18, τότε η μεσαία παρατήρηση είναι η $4\alpha - 1$. Οπότε,

$$4\alpha - 1 = 15 \Leftrightarrow 4\alpha = 16 \Leftrightarrow \alpha = 4$$

Β2. Για $\alpha = 4$, οι παρατηρήσεις είναι οι εξής: $12, 14, 15, 16, 18$.

Άρα,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{\nu} = \frac{12 + 14 + 15 + 16 + 18}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

Οπότε,

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(\bar{x} - t_i)^2}{\nu} = \frac{(15-12)^2 + (15-14)^2 + (15-15)^2 + (15-16)^2 + (15-18)^2}{5}$$

$$= \frac{9 + 1 + 0 + 1 + 9}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

Β3.

$$CV_x = \frac{s_x}{|\bar{x}|} = \frac{\sqrt{4}}{|15|} = \frac{2}{15} \cong 0{,}133 = 13{,}3\% > 10\%$$

Άρα, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Β4. Οι νέες παρατηρήσεις θα προκύψουν από τον τύπο $y_i = -2x_i + 5,\ i = 1, \dots, 5$.

Οπότε, η νέα μέση τιμή ισούται με

$\bar{y} = -2\bar{x} + 5 = -2 \cdot 15 + 5 = -30 + 5 = -25$ και $s_y = |-2| \cdot s_x = 2 \cdot 2 = 4.$

Οπότε,

$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{4}{|-25|} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε, $f'(x) = (2x^3 - 3\kappa x^2 + \kappa)' = 6x^2 - 6\kappa x.$

Αφού η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, τότε

$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 1^2 - 6 \cdot \kappa \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 6 - 6\kappa = 0 \Leftrightarrow 6 = 6\kappa \Leftrightarrow \kappa = 1$

Γ2. Για $\kappa = 1$ έχουμε $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = 6x^2 - 6x, x \in \mathbb{R}$.

Οπότε, $f''(x) = (6x^2 - 6x)' = 12x - 6.$

Λύνω την εξίσωση

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 6 = 0 \Leftrightarrow 12x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{12} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Οπότε, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μεταβολών της f':

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f΄΄	-	0	+
f΄	↘		↗

Η f' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = \frac{1}{2}$. Δηλαδή, ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος όταν $x_o = \frac{1}{2}$.

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $(-1, f'(-1))$ δίνεται από τη σχέση $y = \lambda x + \beta$, όπου $\lambda = f''(-1)$.

Όμως, $f'(-1) = 6 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 6 + 6 = 12$

και $f''(-1) = 12 \cdot (-1) - 6 = -12 - 6 = -18.$

Το σημείο $(-1, f'(-1))$ ανήκει στην εφαπτομένη, άρα επαληθεύει την εξίσωσή της. Επομένως,

$12 = -18\cdot(-1) + \beta \Leftrightarrow 12 = 18 + \beta \Leftrightarrow \beta = -6$

Συνεπώς, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $y = -18x - 6$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x\epsilon\mathbb{R}$ έχουμε

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+4} + 2018\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\cdot(x^2+4)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

Δ2. Λύνω την $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Οπότε, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας μεταβολών της f:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄	-		+
f	$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_o = 0$ το $f(0) = \sqrt{0+4} + 2018 = 2 + 2018 = 2020$.

Δ3. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)\cdot f'(x) - 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2+4)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cdot(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}} - 2x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cdot(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}^2} - 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cdot(x^2+4)\cdot\sqrt{x^2+4}}{x^2+4} - 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{x^2+4} - 2x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{x^2+4} - 2\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+4} - 2\right)\left(\sqrt{x^2+4} + 2\right)}{x\left(\sqrt{x^2+4} + 2\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}^2 - 2^2}{x\left(\sqrt{x^2+4} + 2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+4-4}{x\left(\sqrt{x^2+4} + 2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+4} + 2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x^2+4} + 2}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{0+4} + 2} = 0.$$