ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ-ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΘΕΩΡΙΑ σχολικό βιβλίο σελ. 28

Α2. ΘΕΩΡΙΑ σχολικό βιβλίο σελ. 59

Α3.

α. Λ

β. Σ

γ. Λ

δ. Λ

ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $S^2 = 4 \Leftrightarrow S = 2$

Άρα για να βρω μέση τιμή $\bar{x}$ χρησιμοποιώ τον τύπο (επειδή οι τιμές είναι θετικές $\bar{x} > 0$)

$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{2}{\bar{x}} \Leftrightarrow 0,2\bar{x} = 2 \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{2}{0,2} \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = 10.}$

Β2. Αφού $\bar{x} = 10$ έχω : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} t_i}{6} \Leftrightarrow 10 = \frac{11+7+\kappa+13+11+10}{6} \Leftrightarrow 10 = \frac{\kappa+52}{6} \Leftrightarrow \kappa + 52 = 60 \Leftrightarrow$
$\kappa = 60 - 52 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 8}$

Β3. Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι άρτιο (6) η διάμεσος θα είναι το ημιάθροισμά των 2 μεσαίων παρατηρήσεων αφού διαταχθούν κατά αύξουσα σειρά: 7,8,10,11,11,13. Οι δύο μεσαίες παρατηρήσεις είναι οι 10,11 άρα $\delta = \frac{10+11}{2} \Leftrightarrow \delta = \frac{21}{2} \Leftrightarrow \boxed{\delta = 10,5}$

Το εύρος (R) είναι: $R = 13 - 7 \Leftrightarrow \boxed{R = 6}$

Β4. Αφού από κάθε τιμή αφαιρούμε 2 μονάδες οι νέες παρατηρήσεις του δείγματος θα είναι: $y_i = x_i - 2, \gamma\iota\alpha\ i = 1, .., 6$.

Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου η καινούρια μέση τιμή είναι: $\bar{y} = \bar{x} - 2 \Leftrightarrow \bar{y} = 10 - 2 \Leftrightarrow \boxed{\bar{y} = 8}$

Ενώ η τυπική απόκλιση δεν αλλάζει : $S_y = S_x = 2$ άρα το νέο CV' είναι: $CV' = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ άρα $CV' = 25\%$

άρα το δείγμα δεν είναι ομογενές αφού $CV' = 25\% > 10\%$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} \cdot (x^2 - 2x + 10)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} \cdot (2x - 2) =$$
$$= \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2 - 2x + 10}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$$

Γ2. Έχουμε

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στο παρακάτω πίνακα:

x	∞	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Τέλος η f παρουσιάζει στο $x_0=1$ ελάχιστο με τιμή $f(1)=3$.

Από τον ορισμό του ελαχίστου έχουμε ότι $f(x)\geq f(1)\Leftrightarrow f(x)\geq 3$.

Γ3. Υπολογίζω τις τιμές: $f(5)=\sqrt{5^2-10+10}=5$ και $f'(5)=\frac{4}{5}$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $M\big(5,f(5)\big)$ είναι η

$$y=f'(5)x+\beta \Leftrightarrow y=\frac{4}{5}x+\beta \ :\ (\varepsilon)$$

Αφού $M\in(\varepsilon)\Rightarrow f(5)=\frac{4}{5}\cdot 5+\beta\Leftrightarrow 5=4+\beta\Leftrightarrow \beta=1$.

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $y=\frac{4}{5}x+1$.

Γ4. Για να βρω το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ θέτω $y=0$ στην εξίσωση της εφαπτομένης και προκύπτει: $0=\frac{4}{5}x+1\Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}$

Άρα, το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ είναι το $A\left(-\frac{5}{4},0\right)$.

Για να βρω το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ θέτω $x=0$ στην εξίσωση της εφαπτομένης και προκύπτει:

$$y=\frac{4}{5}\cdot 0+1\Leftrightarrow y=1$$

Άρα, το σημείο τομής με τον άξονα $y'y$ είναι το $B(0,1)$.

Θέμα 4

Δ1. Για λ=3 η f γίνεται: $f(x)=x^3-3x^2+3x$. Οπότε για κάθε $x\in R$ έχουμε $f'(x)=3x^2-6x+3\Leftrightarrow$ $f'(x)=3(x^2-2x+1)\Leftrightarrow$ $\boxed{f'(x)=3(x-1)^2\ \geq 0}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Άρα η f είναι αύξουσα στο R. Αφού $\frac{3}{8}<\frac{5}{6}$ και αφού f γνησίως αύξουσα ισχύει ότι $f\left(\frac{3}{8}\right)<f\left(\frac{5}{6}\right)$

Δ2.

Για λ=3 το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)^2}{(\sqrt{x}-1)x(x-1)}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)}{(\sqrt{x}-1)x}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x\left(\sqrt{x}^2-1^2\right)}=$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{3(\sqrt{x}+1)}{x}=\frac{6}{1}=6$$

Δ3.

Ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης εκφράζεται από την συνάρτηση f΄(x). Έχουμε,

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x - 6 < 0 \Leftrightarrow x < 1$

x	-∞	1	+∞
f΄΄(x)	-	0	+
f΄(x)	↘		↗

άρα για $x_0=1$ η f΄ γίνεται ελάχιστη, δηλαδή το σημείο της C_f όπου η f΄ γίνεται ελάχιστη είναι: A(1, f(1)) δηλαδή A(1,1).

Δ4.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + \lambda x$ για να μην παρουσιάζει η f ακρότατα πρέπει η f΄ να διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Η $f'(x) = 3x^2 - 6x + \lambda$ διατηρεί πρόσημο όταν $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \lambda \leq 0 \Leftrightarrow 36 - 12\lambda \leq 0 \Leftrightarrow 12\lambda \geq 36 \Leftrightarrow \lambda \geq 3$. Άρα η μικρότερη τιμή του λ για να μην παρουσιάζει ακρότατο η f είναι $\boxed{\lambda=3}$.