ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2020

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 76

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 104

Α3.

α) Ψ

β) Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όμως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=3x^2\geq 0$.

Α4.

α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g είναι αντίστοιχα $A_f=(1,+\infty)$ και $A_g=\mathbb{R}$.
Η συνάρτηση $f\circ g$ ορίζεται για

$$\begin{cases} x\in A_g \\ \kappa\alpha\iota \\ g(x)\in A_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ \kappa\alpha\iota \\ e^x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ \kappa\alpha\iota \\ x>0 \end{cases}$$

Οπότε $A_{f\circ g}=(0,+\infty)$ με τύπο

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=\frac{e^x+2}{e^x-1}$$

Β2. Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ τέτοια ώστε $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)\Rightarrow$

$$\frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\frac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}\Rightarrow(e^{x_1}+2)(e^{x_2}-1)=(e^{x_2}+2)(e^{x_1}-1)\Rightarrow$$
$$e^{x_1+x_2}-e^{x_1}+2e^{x_2}-2=e^{x_1+x_2}-e^{x_2}+2e^{x_1}-2\Rightarrow$$
$$3e^{x_1}=3e^{x_2}\Rightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$$

Κτίριο 1: ***Γραμβούσης 5 & Καγιαμπή, Κέντρο Ηρακλείου, τηλ./fax: 2810 285 726***
Κτίριο 2: ***Λεωφόρος Κνωσού 187, Άγιος Ιωάννης, τηλ: 2810 212 333, www.1na.gr***

Οπότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι ‘1-1’ δηλαδή αντιστρέφεται.

Για $x > 0$, θέτω

$$(f \circ g)(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = y \Leftrightarrow e^x + 2 = ye^x - y \Leftrightarrow$$
$$ye^x - e^x = y + 2 \Leftrightarrow (y-1)e^x = y + 2$$

Για $y \neq 1$ είναι

$$e^x = \frac{y+2}{y-1} \quad (\mathbf{1})$$

Όμως για

$$x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+2}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{y+2-y+1}{y-1} > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1$$

Οπότε για $y > 1$ η (1) γράφεται

$$lne^x = \ln\frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow x = \ln\frac{y+2}{y-1}$$

Άρα είναι

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \ln\frac{x+2}{x-1}, \qquad \mu\varepsilon \;\; x > 1$$

Β3. Για $x > 1$ η φ παραγωγίσιμη με

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)} < 0$$

για κάθε $x > 1$, οπότε η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

Β4. Είναι

$$\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{u\to +\infty} lnu = +\infty,$$

γιατί αν θέσω $u = \frac{x+2}{x-1}$ και $x \to 1^+$ τότε $u \to u_0$ όπου

$$u_0 = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\left[(x+2)\cdot\frac{1}{x-1}\right] = 3\cdot(+\infty) = +\infty, \qquad \delta\iota\acute{o}\tau\iota$$
$$\lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x - 1 > 0 \; \gamma\iota\alpha \; x \to 1^+$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)=\lim_{u\to1}lnu,$$

γιατί αν θέσω $u=\frac{x+2}{x-1}$ και $x\to+\infty$ τότε $u\to u_0$ όπου

$$u_0=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού f συνεχής στο πεδίο ορισμού της τότε συνεχής και στο $x_0=0$. Δηλαδή

$$f(0)=\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)\quad(\mathbf{1})$$

Είναι

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1}{1-x}-ln\lambda\right)=1-ln\lambda$$

και

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)=\lambda$$

Αντικαθιστώντας στην (1) προκύπτει ότι

$$1-ln\lambda=\lambda\Leftrightarrow\lambda+ln\lambda-1=0\ \ (\mathbf{2})$$

Θεωρώ συνάρτηση $g(x)=x+lnx-1$, με $x>0$.
Παρατηρώ ότι $g(1)=0$.
Η g συνεχής στο $(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη με $g'(x)=1+\frac{1}{x}>0$, για κάθε $x>0$.

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, οπότε και 1–1, δηλαδή η $x=1$ μοναδική ρίζα.

Επομένως $(2)\Rightarrow g(\lambda)=g(1)\overset{1-1}{\Longleftrightarrow}\lambda=1$

Γ2. Είναι

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x\le0\\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Είναι

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1-1+x}{x(1-x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1-x}=1$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$$

τότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1\Rightarrow f'(0)=1$$

Αφού η f παραγωγίσιμη στο 0 τότε ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A.

Ισχύει ότι $\varepsilon\varphi\theta=f'(0)\Rightarrow \varepsilon\varphi\theta=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$.

Γ3. Για $x<0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0,\qquad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x<0.$$

Για $0<x<\frac{3\pi}{2}$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$.

$$f'(x)=0\Rightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow \varepsilon\varphi x=1\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{4},\mu\varepsilon\ k\in\mathbb{Z}.$$

Αφού $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ τότε $x=\frac{\pi}{4}$ και $x=\frac{5\pi}{4}$. Άρα, τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα $A\left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ και $A'\left(\frac{5\pi}{4},f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ είναι η

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)\Leftrightarrow y-\frac{1}{1-a}=\frac{1}{(1-a)^2}(x-a)\qquad(\varepsilon)$$

Για $y=0$ έχουμε

$$-\frac{1}{1-a}=\frac{1}{(1-a)^2}(x-a)\Rightarrow x=2a-1.$$

Ισχύει ότι $x_B(t)=2a(t)-1$ και το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$ είναι το

$$B(2\alpha(t)-1{,}0)$$

Παραγωγίζοντας έχουμε $x_B'(t)=2a'(t)=-\frac{2}{3}a(t)$.

Για $t=t_0$ προκύπτει ότι

$$x_B'(t_0) = -\frac{2}{3} \cdot a(t_0) = -\frac{2}{3} \cdot (-1) = \frac{2}{3}\ \mu o\nu/sec$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι 2φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με: $f'(x) = e^x + 2x - e$ και $f''(x) = e^x + 2 > 0$.

Εφαρμόζω θεώρημα Bolzano για την f' στο $[0,1]$.

- Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως άθροισμα συνεχών.
- $f'(0) = 1 - e < 0$
  $f'(1) = 2 > 0$.

Αφού ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

Αφού $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα, η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Για $x < x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$.

Για $x > x_0 \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$.

Οπότε η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0.

Ισχύει $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$.

Άρα, $f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$.

Δ2. Από τον ορισμό του ελαχίστου προκύπτει ότι $f(x) \geq f(x_0)$, με την ισότητα να ισχύει για $x = x_0$.

Ισχύει,

$$-1 \leq \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \leq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \leq 1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)}$$

Είναι

$$\lim_{x \to x_0}\left(\frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1\right) = +\infty$$

και

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+1\right)=+\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)-f(x_0)\big)=0$ και $f(x)-f(x_0)>0$ κοντά στο x_0.

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right)=+\infty$$

Δ3. Θεωρώ την συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)+x-x_0, x\in[x_0,1]$.

- Η φ είναι συνεχής στο $[x_0,1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $\varphi(x_0)=f(x_0)<0$ διότι $x_0<1\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x_0)<f(1)\Leftrightarrow f(x_0)<0$
- $\varphi(1)=f(1)+1-x_0=1-x_0>0$

Οπότε $\varphi(x_0)\varphi(1)<0$ άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho\in(x_0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\rho)=0\Rightarrow f(\rho)+\rho=x_0$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x)=f'(x)+1>0$, για κάθε $x\in(x_0,1)$.

Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,1]$ οπότε η ρίζα ρ μοναδική.

Δ4. Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ για την f στο $[x_0,\rho]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[x_0,\rho]$
- Η f παραγωγίσιμη στο (x_0,ρ)

Άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_0,\rho)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}=\frac{x_0-\rho-f(x_0)}{\rho-x_0}=-1+\frac{f(x_0)}{x_0-\rho}$$

Για κάθε $\kappa\in(\rho,1)$ είναι

$$x_0<\xi<\rho<\kappa<1\xLeftrightarrow{f'\nearrow[x_0,+\infty)}f'(\xi)<f'(\kappa)\Leftrightarrow f'(\kappa)>-1+\frac{f(x_0)}{x_0-\rho}\Leftrightarrow$$

$$f'(\kappa)+1>\frac{f(x_0)}{x_0-\rho}\xLeftrightarrow{\cdot(x_0-\rho)<0}(x_0-\rho)(f'(\kappa)+1)<f(x_0)\Leftrightarrow$$

$$f(\rho)(f'(\kappa)+1)<f(x_0)$$