ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2021

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 135

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 51

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 23

Α4.

α) Σωστό
β) Λάθος
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτω $u = x + 1 \Leftrightarrow x = u - 1$, οπότε η δοθείσα σχέση $f(x+1) = (x+1)e^{-x}$, γράφεται

$$f(u) = u \cdot e^{-u+1} \Rightarrow f(u) = u \cdot e^{1-u}$$

Άρα $f(x) = x \cdot e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Β2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$.
Λύνω:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{1-x} > 0 \overset{:e^{1-x}>0}{\Longleftrightarrow} 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$.
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{1-x} < 0 \overset{:e^{1-x}>0}{\Longleftrightarrow} 1 - x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	O.M.	$\searrow$

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$.
Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 το $f(1) = 1 \cdot e^0 = 1$.

B3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η f' παραγωγίσιμη με

$$f''(x) = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x} = (-1-1+x)e^{1-x} = (x-2)e^{1-x}$$

Λύνω:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)e^{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 2.$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow (x-2)e^{1-x} > 0 \overset{:e^{1-x}>0}{\Longleftrightarrow} x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow (x-2)e^{1-x} < 0 \overset{:e^{1-x}>0}{\Longleftrightarrow} x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	
$f(x)$			$\boxed{\text{Σ.Κ.}}$		

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$.
Έχει σημείο καμπής στο 2 το $f(2) = 2e^{1-2} = 2e^{-1}$.

Η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Ελέγχω για ασύμπτωτες στο $-\infty$ και στο $+\infty$.
Είναι

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$$

διότι αν θέσω $1 - x = u$ τότε για $x \to -\infty$ το $u \to +\infty$, άρα το όριο γίνεται

$$\lim_{u\to+\infty} e^u = +\infty$$

Οπότε η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} = 0 = \lambda$$

διότι αν θέσω $1 - x = u$ τότε για $x \to +\infty$ το $u \to -\infty$, άρα το όριο γίνεται

$$\lim_{u\to-\infty} e^u = 0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}xe^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}\underset{DLH}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{(e^{x-1})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-1}=+\infty$.

Οπότε η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β4.

i) Στο $A_1=(-\infty,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα:

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),f(1)\right]=(-\infty,1]$$

διότι

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}xe^{1-x}=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$$

Στο $A_2=(1,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα:

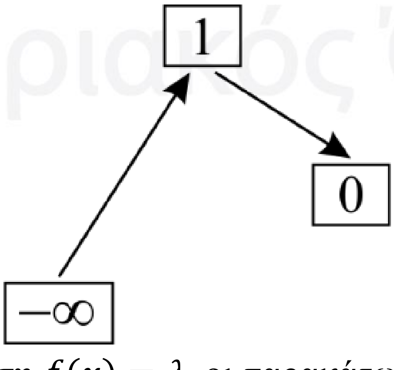
$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to1^+}f(x)\right)=(0,1)$$

διότι

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}xe^{1-x}=0$$

Επομένως $f(\mathbb{R})=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,1]$.

ii) Από το πρόχειρο σχεδιάγραμμα του συνόλου τιμών της f που φαίνεται παρακάτω



προκύπτουν για την εξίσωση $f(x)=\lambda$, οι παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $\lambda>1$, τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ αφού $\lambda\notin f(A_1)$ και $\lambda\notin f(A_2)$.

- Αν $\lambda \leq 0$ ή $\lambda = 1$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μοναδική λύση αφού $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \notin f(A_2)$.
- Αν $\lambda \in (0,1)$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει 2 λύσεις αφού $\lambda \in f(A_1)$ και $\lambda \in f(A_2)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πολυωνυμική.
- Η f είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική.
- Ελέγχω την συνέχεια της f στο $x_0 = 0$.
  - $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$.
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sigma\upsilon\nu x = 1$.
  - $f(0) = 1$

  Άρα η f συνεχής στο 0.

Συνεπώς, η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Ελέγχω την παραγωγισιμότητα της f στο $x_0 = 0$.
Είναι

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(\alpha x^2 - 3x - 1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^-} (\alpha x^2 - 3x - 1) = -1$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

Αφού τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2.

i) Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = -\eta\mu x$.
Επίσης $f(0) = 1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} = 0$.
Αφού $f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

ii) Έχουμε $f(x) = συνx$ για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$, οπότε $f'(x) = -ημx$ με $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Λύνω την $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -ημx = 0 \Leftrightarrow ημx = 0 \overset{x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)}{\Longleftrightarrow} x = \pi$.

Επομένως το μοναδικό $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$ είναι το $\xi = \pi$.

Γ3. Για $x < 0$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με :

$$f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1, x < 0$$

Λύνω την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 - 6x - 1 = 0$.
Όμως, $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3a \cdot (-1) = 36 + 12a = 12(3 + a) < 0$, για κάθε $a < -3$.
Άρα, η $f'(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(-\infty, 0)$. Δηλαδή, στη C_f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ4. Για $x < 0$, είναι $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1 < 0$ αφού $\alpha < -3$, άρα $3a < 0$ και $\Delta < 0$.
Άρα, η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$, οπότε

$$f(\Delta_1) = \left[f(0), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = [1, +\infty)$$

διότι, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = \lim_{x\to-\infty} (\alpha x^3) = +\infty$, με $a < -3$

Στο $\Delta_2 = \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ γνωρίζουμε ότι $-1 \le συνx < 1$, για κάθε $x \in \Delta_2$, άρα $f(\Delta_2) = [-1,1)$.

Οπότε

$$f\left(\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]\right) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1, +\infty)$$

Άρα, $f(x) \ge -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρώ την $k(x) = lnx - \frac{1}{x}$, με $x > 0$ και εφαρμόζω θεώρημα Bolzano στο $[1, e]$.

- Η $k(x)$ είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $k(1) = -1 < 0$

- $k(e) = 1 - \frac{1}{e} > 0$

Αφού ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0(1, e)$ τέτοιο ώστε $k(x_0) = 0 \Leftrightarrow lnx_0 = \frac{1}{x_0}$

Η $k(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$k'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$$

για κάθε $x > 0$.

Άρα, η $k(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Δ2. Ισχύει ότι

$$\frac{1}{x_0} = lnx_0 \quad (1)$$

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = lnx_0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}$$

λόγω της (1).

Λύνω την εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = x_0$.

Λύνω την ανίσωση $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} > \frac{1}{x} \Leftrightarrow x > x_0$.

x	$-\infty$	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$			−	0	+	
$f(x)$			↘	O.E.	↗	

Σύμφωνα, με το παραπάνω πίνακα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0.

Τέλος, $f(x_0) = \ln x_0 \cdot (x_0 + 1) - lnx_0 - 1 = lnx_0(x_0 + 1 - 1) - 1 = 1 - 1 = 0$, λόγω της (1).

Δ3. Αρκεί να δείξω ότι $g(x) = h(x)$ έχει μοναδική λύση. Διακρίνω τις εξής περιπτώσεις:

- Αν $x \leq 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη διότι $g(x) \leq 0$ και $h(x) > 0$.
- Αν $x > 0$ τότε η εξίσωση γίνεται

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow x \cdot e^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln(x \cdot e^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$lnx - x = (x+1)\cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \Leftrightarrow lnx - x = (x+1)\cdot lnx_0 - x - 1 \Leftrightarrow$$
$$lnx_0\cdot(x+1) - lnx - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Όμως, από τον ορισμό του ελαχίστου για την συνάρτηση f προκύπτει ότι
$$f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$
με την ισότητα να ισχύει για $x = x_0$.
Άρα, οι C_h, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη x_0.

Θα εξετάσω αν έχουν κοινή εφαπτομένη δηλαδή αν $g'(x_0) = h'(x_0)$. Οι g, h είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ με
$$g'(x) = e^{-x} - x\cdot e^{-x} \text{ και } h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right).$$
Άρα,
$$g'(x_0) = h'(x_0) \Leftrightarrow e^{-x_0} - x_0e^{-x_0} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot(lnx_0 - 1) \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$$e^{-x_0}\cdot(1-x_0) = \frac{x_0^{x_0}x_0}{e^{x_0+1}}\cdot\left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \Leftrightarrow e^{-x_0}(1-x_0) = \frac{x_0^{x_0}x_0}{e^{x_0+1}}\cdot\frac{1-x_0}{x_0} \overset{x_0\in(1,e)}{\Longleftrightarrow}$$
$$e^{-x_0} = \frac{x_0^{x_0}}{e^{x_0+1}} \Leftrightarrow e = x_0^{x_0} \Leftrightarrow 1 = x_0lnx_0 \Leftrightarrow lnx_0 = \frac{1}{x_0}$$
που ισχύει λόγω της (1).

Δ4. Η κατακόρυφη απόσταση των Α, Β είναι η $d(x) = |f(x) - \varphi(x)| = f(x) - \varphi(x), x > 0$ αφού $f(x) > \varphi(x)$.
Διακρίνω τις περιπτώσεις:

- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε και η d είναι παραγωγίσιμη. Αφού η d:
  - παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο,
  - το x_0 είναι εσωτερικό του $(0, +\infty)$
  - είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $d'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$

  τότε από θεώρημα Fermat προκύπτει ότι $d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = \varphi'(x_0) \Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0$. (αφού x_0 ελάχιστο της f).
  Άρα το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

Άρα το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.