ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 28

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 87

Α3.

α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Λάθος

Α4.

α) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ \gamma\iota\alpha\ x > 0$

β) $(f(g(x))' = \mathrm{f}'(\mathrm{g}(\mathrm{x})) \bullet \mathrm{g}'(\mathrm{x})$

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η μέση τιμή δίνεται από την σχέση:

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{5} t_i}{\nu} = \frac{25+10+5+20+15}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

Και το

Εύρος(R)=25-5=20

Β2. Έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{\iota=1}^{5}(t_i - \bar{x})^2 = \frac{(25-15)^2 + (10-15)^2 + (5-15)^2 + (20-15)^2 + (15-15)^2}{5}$$

$$= \frac{100+25+100+25+0}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

Β3.

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{50}}{15} = \frac{\sqrt{25 \cdot 2}}{15} = \frac{5\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Εξετάζω αν το $\frac{\sqrt{2}}{3} > \frac{1}{10}$ κάνοντάς τα κλάσματα ομώνυμα. Προκύπτει $\frac{10\sqrt{2}}{30} > \frac{3}{30}$.
Αφού το CV είναι μεγαλύτερο του $\frac{1}{10}$ το δείγμα **δεν** είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η παράγωγος της f(x) είναι:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + a$$

Από δεδομένα έχουμε:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + a = 0 \Rightarrow \alpha = 15$$

Γ2.

Έστω (ε): y=λx+β η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M(2,f(2))

$$λ= f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 18 \cdot 2 + 15 = 3 \cdot 4 - 36 + 15 = 12 + 1536 = 27 - 36 = -9$$

άρα

(ε): y=-9x+β

Είναι

$$f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 1 = 3$$

αφού το M(2,3) είναι σημείο της εφαπτομένης οι συντεταγμένες επαληθεύουν την εξίσωση $\boxed{y=-9x+\beta}$. Δηλαδή

3=-9· 2+β⇒β=21

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M είναι

$$\boxed{y=-9x+21}$$

Γ3.

Έχουμε

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 6x + 5) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x = 1 \text{ ή } x = 5$$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		+		−		+	
f		↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ $και$ $[5, +\infty)$και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 5]$.

Η f για x=1 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το

$$f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 1 = 8$$

Ενώ για x=5 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το

$$f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 1 = -24$$

Γ4.

Έχουμε

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 18x + 15}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x-5)}{(x+1)} =$$

$$= \frac{3(1-5)}{1+1} = \frac{3(-4)}{2} = -6$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f ορίζεται όταν $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ άρα $D_f = R - \{-1\}$.

Η παράγωγος της f είναι

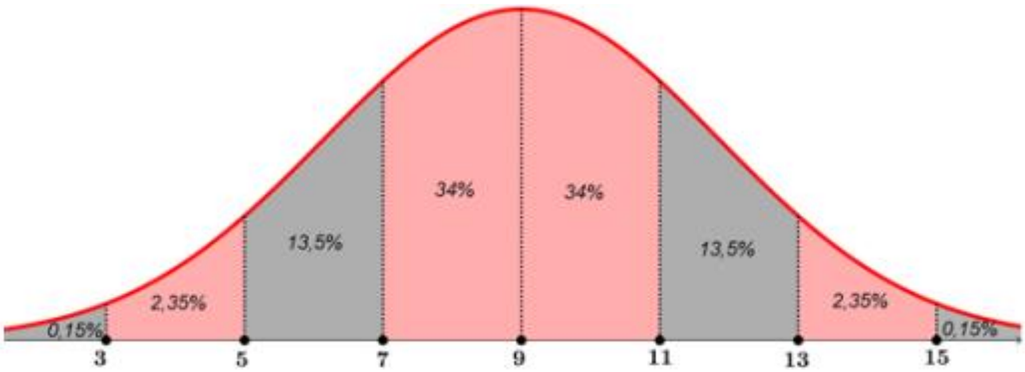
$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{(x)'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Δ2.

$$f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9} \; άρα \; \bar{x} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$$

$$f'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} \; άρα \; s = \frac{1}{2f'(1)} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 2$$

Δ3.



Από το σχήμα έχουμε ότι το 13,5%+34%+34%=81,5% των μαθητών έχουν χρόνο επιστροφής από 5 έως 11 λεπτά. Άρα το πλήθος τους είναι:

$$\frac{81,5}{100}\cdot 2000 = 1630 \text{ μαθητές}$$

Αντίστοιχα το 0,15% των μαθητών έχουν χρόνο επιστροφής πάνω από 15 λεπτά. Άρα το πλήθος είναι:

$$\frac{0,15}{100}\cdot 2000 = 3 \text{ μαθητές}$$

Δ4.

Αφού ο χρόνος επιστροφής των μαθητών αυξάνεται κατά 3 λεπτά η νέα μέση τιμή θα είναι:

$$\bar{y} = \bar{x} + 3 = 9 + 3 = 12\ \lambda\varepsilon\pi\tau\acute{\alpha}$$

Ενώ η τυπική απόκλιση θα παραμείνει ίδια, δηλαδή:

$$s_y = s = 2\ \lambda\varepsilon\pi\tau\acute{\alpha}$$