

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2022

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 186

A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 142

A3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 161

A4.

α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Η $h = f \circ g$ ορίζεται για

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

Οπότε $D_h = [0,1]$ με τύπο

$$h(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

B2. Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $h'(x) = 2(x - 1) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$, οπότε είναι 1-1 δηλαδή αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι το σύνολο τιμών της h , δηλαδή

$$D_{h^{-1}} = h([0,1]) = [h(1), h(0)] = [0,1]$$

$$\Theta\acute{\epsilon}\tau\omega h(x) = y \Rightarrow (x - 1)^2 = y \xrightarrow{y \in [0,1]} |x - 1| = \sqrt{y} \xrightarrow{x-1 \leq 0} 1 - x = \sqrt{y} \Rightarrow$$

$$x = 1 - \sqrt{y} \Rightarrow h^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y}$$

Άρα τελικά $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$ με $x \in [0,1]$.

B3.

i) Είναι

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

Η φ συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις συνεχών.

Ελέγχω αν η φ είναι συνεχής στο 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \varphi(1)$$

Δηλαδή η φ συνεχής και στο 1.

Άρα, φ συνεχής στο $[0,1]$ με $\varphi(0) = 1$ και $\varphi(1) = \frac{1}{2}$. Οπότε για τη συνάρτηση φ ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο $[0,1]$.

ii) Η συνάρτηση $t(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ οπότε έχουμε

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu \frac{\pi}{6} < \eta\mu \alpha < \eta\mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu \alpha < 1 \Rightarrow \varphi(1) < \eta\mu \alpha < \varphi(0)$$

Οπότε η τιμή $\eta\mu \alpha$ βρίσκεται μεταξύ των $\varphi(0)$ και $\varphi(1)$, επομένως σύμφωνα με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu \alpha$, με $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x < -1$ είναι $f'(x) = -2 \Rightarrow f(x) = (-2x)'$
και επειδή f συνεχής στο $(-\infty, -1)$, από συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχει σταθερά $c_1 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x) = -2x + c_1$$

Για $x > -1$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = (x^3 - x)'$
και επειδή f συνεχής στο $(-1, +\infty)$, από συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχει σταθερά $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x) = x^3 - x + c_2$$

Όμως, η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων οπότε $f(0) = 0$, επομένως $c_2 = 0$.

Επειδή, η f συνεχής στο \mathbb{R} τότε συνεχής και στο -1 , δηλαδή

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

Όμως,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x + c_1) = 2 + c_1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 - x) = -1 + 1 = 0$$

Άρα, $f(-1) = 2 + c_1 = 0 \Rightarrow f(-1) = 0$ και $c_1 = -2$.

Τελικά,

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Γ2. Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $x_0 > -1$ έχει εξίσωση
 $(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Επειδή η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2 είναι

$$\begin{aligned} -2 - f(x_0) &= f'(x_0)(-x_0) \Rightarrow -2 - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(-x_0) \Rightarrow \\ -2 - x_0^3 + x_0 &= -3x_0^3 + x_0 \Rightarrow 2x_0^3 = 2 \Rightarrow x_0^3 = 1 \Rightarrow x_0 = 1 \end{aligned}$$

Είναι $f(1) = 0$ και $f'(1) = 2$ οπότε η εξίσωση της (ε) είναι

$$y = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2$$

Γ3. Έστω $M(x(t), y(t))$ σημείο της (ε) οπότε

$$y(t) = 2x(t) - 2$$

με $x(t) > 2$ επομένως $y(t) > 0$.

Αφού K η προβολή του M στον άξονα $x'x$ τότε οι συντεταγμένες του είναι $K(x(t), 0)$.

Το εμβαδόν του τριγώνου MKG είναι

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \cdot (MK) \cdot (KG) = \frac{1}{2} |y(t)| \cdot |x(t) - 2| = \frac{1}{2} y(t) \cdot (x(t) - 2) \\ &= \frac{1}{2} (2x(t) - 2)(x(t) - 2) = (x(t) - 1)(x(t) - 2) \end{aligned}$$

Για $t = t_0$ το M διέρχεται από το $B(3,4)$ δηλαδή $x(t_0) = 3$ μονάδες και $y(t_0) = 4$ μονάδες, επίσης $x'(t_0) = 2$ μονάδες ανά δευτερόλεπτο.

Οπότε, ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού σε χρόνο t είναι

$$E'(t) = x'(t)(x(t) - 2) + (x(t) - 1) \cdot x'(t)$$

Για $t = t_0$ είναι

$$\begin{aligned} E'(t_0) &= x'(t_0)(x(t_0) - 2) + (x(t_0) - 1) \cdot x'(t_0) \\ &= 2 \cdot (3 - 2) + (3 - 1) \cdot 2 \\ &= 6 \text{ τετρ. μονάδες ανά δευτερόλεπτο} \end{aligned}$$

Γ4. Θα υπολογίσω το κάθε όριο χωριστά.

Για το

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu(-2x - 2)}{-2x - 2}$$

θέτω $-2x - 2 = u$ οπότε για $x \rightarrow -\infty$ τότε $u \rightarrow +\infty$, άρα το όριο γίνεται

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu u}{u} &= 0 \text{ επειδή} \\ \left| \frac{\eta\mu u}{u} \right| &\leq \left| \frac{1}{u} \right| \Rightarrow -\frac{1}{|u|} \leq \frac{\eta\mu u}{u} \leq \frac{1}{|u|} \end{aligned}$$

Όμως,

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|u|} \right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{|u|} = 0$$

Οπότε, από κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu u}{u} = 0$$

Επίσης στο

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3}$$

θέτω $-x = u$ και το όριο γίνεται

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{1+u^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3 - u}{1+u^3} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^3}{u^3} = 1$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] = 0 + 1 = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

i) Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{3x} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Λύνω τις:

- $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} > 0 \Rightarrow x > 1$

Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι:

x	0	1
$f'(x)$	/ / / / / / / / / /	- 0 +
$f(x)$	/ / / / / / / / / /	↘ ↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Στο $\Delta_1 = (0,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε

$$f(\Delta_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1 - \ln 3, +\infty)$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln(3x)) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

Στο $\Delta_2 = (1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (1 - \ln 3, +\infty)$$

γιατί

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1 - \ln 3 \text{ αφού η } f \text{ συνεχής στο } 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(3x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x} \right) \right] = +\infty \cdot (1 - 0) = +\infty$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{3x} = 0$$

$$\text{Είναι } e < 3 \Rightarrow \ln e < \ln 3 \Rightarrow 1 - \ln 3 < 0 \Rightarrow f(1) < 0$$

Αφού $0 \in f(\Delta_1)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_1 \in \Delta_1$ (με $x_1 < 1$) η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 .

Αφού $0 \in f(\Delta_2)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_2 \in \Delta_2$ η οποία είναι μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2 .

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$.

ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

42. Επειδή η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα x_1 και x_2 τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx$$

Είναι:

- $x_1 \leq x \leq 1 \stackrel{f \searrow}{\Rightarrow} f(x_1) \geq f(x) \Rightarrow f(x) \leq 0$, και
- $1 \leq x \leq x_2 \stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow} f(x) \leq f(x_2) \Rightarrow f(x) \leq 0$

Άρα

$$\begin{aligned} E &= - \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = - \int_{x_1}^{x_2} (x - \ln(3x)) dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln(3x) - x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \ln(3x) dx - \int_{x_1}^{x_2} x dx = \int_{x_1}^{x_2} (x)' \ln(3x) dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} \\ &= [x \ln(3x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \frac{1}{x} dx - \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^2}{2} \\ &= x_2 \ln(3x_2) - x_1 \ln(3x_1) - (x_2 - x_1) + \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} \end{aligned}$$

Όμως $f(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 - \ln(3x_1) = 0 \Rightarrow \ln(3x_1) = x_1$ και
 $f(x_2) = 0 \Rightarrow x_2 - \ln(3x_2) = 0 \Rightarrow \ln(3x_2) = x_2$

Οπότε

$$\begin{aligned} E &= x_2^2 - x_1^2 - x_2 + x_1 + \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} \\ &= \frac{2x_2^2 - 2x_1^2 - 2x_2 + 2x_1 + x_1^2 - x_2^2}{2} \\ &= \frac{x_2^2 - x_1^2 + 2x_1 - 2x_2}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 2(x_2 - x_1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2) \end{aligned}$$

43. Είναι $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \stackrel{+2}{\Leftrightarrow} 2 - x_1 > 1$

Οπότε $f(2 - x_1) < 0 \Leftrightarrow f(2 - x_1) < f(x_2) \stackrel{f' > 0}{\Leftrightarrow} 2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2$
 που ισχύει διότι από Δ2 ερώτημα, το εμβαδόν είναι θετικό δηλαδή

$$E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0 \stackrel{\frac{1}{2}(x_2 - x_1) > 0}{\Leftrightarrow} x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2$$

44. Για $x > 0$ η εξίσωση γράφεται $2f(x) = 1 - \ln 3 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$
 $2f(x) = f(1) + f'(x_2)(x - x_2)$

Οι εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της C_f στα σημεία $K(1, f(1))$ και $\Lambda(x_2, f(x_2))$ αντίστοιχα είναι:

$$(\varepsilon_1): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \stackrel{f'(1)=0}{\iff} y - f(1) = 0 \Leftrightarrow y = f(1)$$

και

$$(\varepsilon_2): y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$$

Αφού f κυρτή στο $(0, +\infty)$ τότε η C_f θα βρίσκεται πάνω από οποιαδήποτε εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Δηλαδή ισχύει ότι

- $f(x) \geq f(1)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$, και
- $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_2$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω ανισώσεις προκύπτει ότι

$$2f(x) > f(1) + f'(x_2)(x - x_2) \text{ για κάθε } x > 0$$

Οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.