ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2024

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 31

Α2. α)Σχολικό βιβλίο, σελίδα 65
β)Σχολικό βιβλίο, σελίδα 86-87

Α3.

- ***α)*** Λάθος
- ***β)*** Λάθος
- ***γ)*** Σωστό
- ***δ)*** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = x^2 - 6x + 5$$

Β2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 5$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ ή $x > 5$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 5$
Η μονοτονία της συνάρτησης προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	Τ.Μ.	↘	Τ.Ε.	↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ *και στο* $[5, +\infty)$.
Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,5]$.
Η f παρουσιάζει για x=1 τοπικό μέγιστο το

$$f(1)=\frac{1}{3}\cdot 1^3-3\cdot 1^2+5\cdot 1+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-3+5+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+2=\frac{2}{3}+2=\frac{2}{3}+\frac{6}{3}=\frac{8}{3}$$

Η f παρουσιάζει για x=5 τοπικό ελάχιστο το

$$f(5)=\frac{1}{3}\cdot 5^3-3\cdot 5^2+5\cdot 5+\frac{1}{3}=\frac{125}{3}-3\cdot 25+25+\frac{1}{3}=$$
$$=\frac{125}{3}-75+25+\frac{1}{3}=\frac{126}{3}-50=42-50=-8$$

Β3. Έστω ε: $y=\lambda x+\beta$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M\big(0,f(0)\big)$. Ισχύει

$$\lambda=f'(0)=5$$

Άρα (ε) $y=5x+\beta$.
Είναι

$$f(0)=\frac{1}{3}$$

Αφού το σημείο $M\left(0,\frac{1}{3}\right)$ είναι σημείο της εφαπτομένης οι συντεταγμένες επαληθεύουν την εξίσωση (ε). Δηλαδή

$$\frac{1}{3}=5\cdot 0\Leftrightarrow \beta=\frac{1}{3}\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \varepsilon: y=5x+\frac{1}{3}$$

Β4. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(1)}{h}=f'(-1)=(-1)^2-6\cdot(-1)+5=1+6+5=12$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$s=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)}=\frac{8}{2}=4$$

Γ2 . **Θεωρούμε ότι η μέση τιμή είναι θετική διαφορετικά οι υποψήφιοι θα έπρεπε με διερεύνηση αρκετά απαιτητική, για τη μοριοδότηση του συγκεκριμένου ερωτήματος, να απορρίψουν τη μία λύση.**

$$CV=20\%\Leftrightarrow\frac{s}{\bar{x}}=\frac{20}{100}\Leftrightarrow\frac{4}{\bar{x}}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\bar{x}=20$$

Γ3.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} xi}{5} \Leftrightarrow 20 = \frac{22 + 18 + 20 + \kappa + 14 + 16}{5} \Leftrightarrow$$
$$100 = 90 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = 10$$

Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά και έχουμε:

14 16 18 22 30

Αφού το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός τότε η διάμεσος ισούται με τη μεσαία παρατήρηση άρα δ= 18.

Γ4. Οι νέες παρατηρήσεις θα είναι της μορφής:

$$\mathrm{yi} = \mathrm{xi} + 0.1 \cdot \mathrm{xi} = 1.1 \cdot \mathrm{xi} \text{ για } \mathrm{i} = 1,2,3,4,5$$

Επομένως έχουμε :

$$\bar{y} = 1.1 \cdot \bar{x} = 1{,}1 \cdot 20 = 22$$
$$s_y = |1{,}1| \cdot s_x = 1{,}1 \cdot 4 = 4{,}4$$

Άρα $CV_y = \frac{4{,}4}{22} = 0{,}2$ ή $CV_y = 20\%$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΒ:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \Leftrightarrow$$
$$100 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$
$$y^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow$$
$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

Πρέπει $x > 0$ και $y^2 > 0 \Leftrightarrow 100 - x^2 > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x < 10$.

Άρα

$$f(x) = \sqrt{100 - x^2}, x \in (0,10)$$

Δ2. Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης είναι:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} \cdot (-2\mathrm{x}) = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}$$

Άρα $f'(8) = \frac{-8}{\sqrt{36}} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$.

Δ3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{100-x^2}-8}{x-6}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{100-x^2-64}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(6-x)(6+x)}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)}=-\frac{12}{16}=-\frac{3}{4}$

Δ4. Αφού $f'(x)<0$, για κάθε $x\in(0,10)$ τότε f γνησίως φθίνουσα στο (0,10).

Αφού $x_1<x_3<x_2 \overset{\text{f } γν.φθίνουσα}{\Longleftrightarrow} f(x_1)>f(x_3)>f(x_2)$