

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2025

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 186

A2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 76

A3. Σχολικό βιβλίο σελ. 161

A4.

- α)** Σωστό
- β)** Σωστό
- γ)** Λάθος
- δ)** Λάθος
- ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Η f παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9$.

Αφού η f παρουσιάζει στο $x_0 = 1$ τοπικό ακρότατο, εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, τότε από θεώρημα Fermat είναι

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -6$$

Για $\alpha = -6$:

B2. Είναι $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ και $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

Λύνω:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 3$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					
		T.M.	T.E.		

Στο $\Delta_1 = [0,1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε $f(\Delta_1) = [f(0), f(1)] = [-3,1]$.

Στο $\Delta_2 = [1, 3]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε $f(\Delta_2) = [f(3), f(1)] = [-3, 1]$.
Στο $\Delta_3 = [3, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε $f(\Delta_3) = [f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = [-3, +\infty)$.

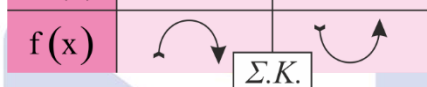
Αφού $0 \in f(\Delta_1), f(\Delta_2), f(\Delta_3)$, $f(3) \neq 0$ και $f(1) \neq 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις τουλάχιστον θετικές πραγματικές ρίζες οι οποίες είναι μοναδικές αφού f γνησίως μονότονη συνάρτηση σε καθένα απ' τα $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

B3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 6x - 12$.

Λύνω:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$,
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2$,
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 2$.

Το πρόσημο της f'' και η κυρτότητα της f φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$. Παρουσιάζει σημείο καμπής στο $K(2, -1)$.

B4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f'(x) + 1$ και η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο B είναι $y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi)$ (ε_1).

Το σημείο τομής της (ε_1) ως προς τον άξονα yy' είναι:

$$\begin{aligned}
 y - g(\xi) &= g'(\xi)(0 - \xi) \Leftrightarrow \\
 y &= \xi + f(\xi) - (1 + f'(\xi))\xi \Leftrightarrow \\
 y &= \xi + f(\xi) - \xi - \xi f'(\xi) \Leftrightarrow \\
 y &= f(\xi) - \xi f'(\xi)
 \end{aligned}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A είναι $y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi)$ (ε_2).

Το σημείο τομής της (ε_2) ως προς τον άξονα yy' είναι:

$$y - f(\xi) = -\xi f'(\xi) \Leftrightarrow y = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

Άρα και οι δύο ευθείες (ε_1), (ε_2) τέμνονται στο σημείο $M(0, f(\xi) - \xi f'(\xi))$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \eta \mu x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$
- $f(0) = 0$

Αφού $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Επίσης,

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \cdot \eta \mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x \cdot \frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$$

Αφού τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα, τότε δεν υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. Για $x < 0$, η f είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, για $x > 0$, η f είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και αφού f συνεχής στο 0 τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Αναζητώ πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

Στο $-\infty$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \eta \mu x) = 0$$

διότι,

$$|e^x \cdot \eta \mu x| = e^x \cdot |\eta \mu x| \leq e^x \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \cdot \eta \mu x \leq e^x$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$, άρα από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \eta \mu x) = 0$$

Άρα η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Στο $+\infty$ είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

Άρα, $\lambda = 1$.

Ακόμη, είναι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = 2 \end{aligned}$$

Άρα η $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Γ3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(-\pi, 0)$.

Θέτω $g(x) = f(x) - y = e^x \cdot \eta \mu x - x - \frac{1}{2}$ για $x \in [-\pi, 0]$.

- Η g είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχώς συναρτήσεων.
- $g(-\pi) = e^{-\pi} \cdot \eta \mu(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$,
- $g(0) = e^0 \cdot \eta \mu 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$.

Άρα $g(-\pi) \cdot g(0) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $\xi \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$. Δηλαδή, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y = x + \frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.

Γ4. Έστω το κινητό $M(x(t), y(t))$ που κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x) = \sqrt{x^2 + x}$ με $x \geq 0$ και $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

Ισχύει $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$ για κάθε $t \geq 0$.

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση για $t > 0$, προκύπτει

$$y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} \cdot (x^2(t) + x(t))' = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = \frac{x'(t)(2x(t) + 1)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

Έστω ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 > 0$ για την οποία ισχύει ότι

$$\begin{aligned} y'(t_0) &= x'(t_0) \Leftrightarrow \\ \frac{x'(t_0)(2x(t_0) + 1)}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} &= x'(t_0) \xrightarrow{x'(t_0) > 0} \\ \frac{2x(t_0) + 1}{2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} &= 1 \Leftrightarrow \\ 2x(t_0) + 1 &= 2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} \xrightarrow{2x(t_0) + 1 > 0} \\ (2x(t_0) + 1)^2 &= (2\sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)})^2 \Leftrightarrow \\ 4x^2(t_0) + 4x(t_0) + 1 &= 4x^2(t_0) + 4x(t_0) \Leftrightarrow \\ 1 &= 0, \text{ άτοπο} \end{aligned}$$

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 > 0$ για την οποία ισχύει ότι $y'(t_0) = x'(t_0)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού F παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$, ισχύει ότι $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x > 0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{F(x)}{x^{\ln x}} \right)' = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot (x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} \\ &= \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x) - F(x) \cdot \frac{2 \ln x}{x}}{x^{\ln x}} \\ &= \frac{xf(x) - 2F(x) \ln x}{x \cdot x^{\ln x}} = \frac{2F(x) \ln x - 2F(x) \ln x}{x \cdot x^{\ln x}} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Διότι } (x^{\ln x})' = (e^{\ln x \cdot \ln x})' = (e^{\ln x \cdot \ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' = x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}$$

Άρα $g'(x) = 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε η g είναι σταθερή, δηλαδή $g(x) = c, c \in \mathbb{R}$.

Δ2.

i) Για $x \neq 1$, είναι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}} = \frac{f'(1)}{1} = 2$$

διότι

- από τη σχέση $xf(x) = 2F(x)\ln x$ για $x = 1$ έχουμε $f(1) = 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = \lambda_\varepsilon = 2$$

αφού η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ε) .

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$

ii) Για $0 < x \neq 1$ είναι $xf(x) = 2F(x)\ln x \Leftrightarrow F(x) = \frac{xf(x)}{2\ln x}$.

Αφού η F είναι συνεχής στο 1, καθώς F παραγωγίσιμη, τότε

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)}{2\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Αφού $g(x) = c \Leftrightarrow F(x) = c \cdot x^{\ln x}$ για κάθε $x > 0$ για $x = 1$ είναι $F(1) = c \Leftrightarrow c = 1$.

Άρα $F(x) = x^{\ln x}$ για κάθε $x > 0$.

43. Για $x > 0$ είναι $F'(x) = (x^{\ln x})' = x^{\ln x} \cdot \frac{2\ln x}{x}$.

Λύνω:

- $F'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1,$
- $F'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1,$
- $F'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1.$

Το πρόσημο της F' και η μονοτονία της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$F'(x)$			-	+
$F(x)$				

T.E.

Άρα, η F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Για $x > 0$, η εξίσωση γίνεται

$$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2 \quad (1)$$

Παρατηρώ ότι η $x = 1$ είναι λύση της (1).

Για $0 < x < 1$ ισχύει $x^2 < x \stackrel{F \nearrow}{\Leftrightarrow} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -(x-1)^2 > 0$, αδύνατο.

Για $x > 1$ ισχύει $x^2 > x \stackrel{F \nearrow}{\Leftrightarrow} F(x^2) > F(x) \Leftrightarrow F(x^2) - F(x) > 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} -(x-1)^2 > 0$, αδύνατο.

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

- Δ4.** Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της F , τις ευθείες $x = 1$, $x = e$ και τον άξονα $x'x$, είναι

$$E = \int_1^e |F(x)| dx = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx$$

Διότι από τον ορισμό του ελαχίστου για την F είναι $F(x) \geq F(1) = 1 > 0$ για κάθε $x > 0$.

Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου είναι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Θέτω όπου x το $\ln^2 x$ και η ανίσωση γίνεται $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\ln^2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Οπότε,

$$\int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \quad (2)$$

Όμως

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx &= \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx \\ &= \int_1^e (x)' \cdot \ln^2 x dx + [x]_1^e \\ &= [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e \left(x \cdot \frac{2 \ln x}{x} \right) dx + e - 1 \\ &= e - 0 - 2 \int_1^e \ln x dx + e - 1 \\ &= 2e - 1 - 2 \int_1^e (x)' \ln x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2e - 1 - 2 \left[[x \ln x]_1^e - \int_1^e \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) dx \right] \\ &= 2e - 1 - 2 \left(e - 0 - \int_1^e 1 dx \right) \\ &= 2e - 1 - 2(e - [x]_1^e) \\ &= 2e - 1 - 2(e - e + 1) \\ &= 2e - 1 - 2 \\ &= 2e - 3 \end{aligned}$$

Άρα, (2) $\Rightarrow E > 2e - 3$.



Φροντιστηριακός Όμιλος