

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2025**

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 93

A2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 16

A3.

- α) Λάθος
- β) Σωστό
- γ) Σωστό
- δ) Σωστό
- ε) Λάθος

A4.

- α) $(c)' = 0$
- β) $(x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ Β

B1. Ισχύει:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Leftrightarrow v_1 + 15 + 11 + 8 + 6 = 50 \Leftrightarrow v_1 = 50 - 40 = 10$$

Επίσης,

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{10}{50} = 0,2 \text{ ή } 20\%$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{15}{50} = 0,3 \text{ ή } 30\%$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{11}{50} = 0,22 \text{ ή } 22\%$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{8}{50} = 0,16 \text{ ή } 16\%$$

$$f_5 = \frac{v_5}{v} = \frac{6}{50} = 0,12 \text{ ή } 12\%$$

Ο πίνακας γίνεται:

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική συχνότητα N_i
0	10	20	10
1	15	30	25
2	11	22	36
3	8	16	44
4	6	12	50
Σύνολο	50	100	

B2. Είναι

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$
0	10	0
1	15	15
2	11	22
3	8	24
4	6	24
Σύνολο	50	85

Οπότε,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} = \frac{85}{50} = 1,7$$

B3. Αφού $v = 50$ τότε η διάμεσος είναι ίση με το ημίαθροισμα 25^{ης} και 26^{ης} παρατήρησης. Δηλαδή,
 $\delta = \frac{1+2}{2} = 1,5$.

B4.

α) Το πολύ 3 ώρες εργάζεται το $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 88\%$.

β) Οι νέες παρατηρήσεις θα προκύψουν από τον τύπο $y_i = x_i + 4, i = 1, \dots, 5$.

Οπότε η νέα μέση τιμή ισούται με $\bar{y} = \bar{x} + 4 = 5,7$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -6x^2 + 12x, x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x \cdot (x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2,$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2,$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 2.$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f δίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$				
		T.E.	T.M.	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$.

Γ2. Στη θέση $x_0 = 0$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(0) = a$ και στη θέση $x_1 = 2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή $f(2) = a + 8$.

Τέλος, $\frac{f(0)+f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow 2a + 8 = -16 \Leftrightarrow a = -12$

Γ3. Είναι $f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 12$ και $f(1) = -8$.

Έστω $(\varepsilon) : y = \lambda x + \beta$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $M(1, f(1))$.

Ισχύει, $\lambda = f'(1) = 6$.

Όποτε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η

$$y = f'(1) \cdot x + \beta \Leftrightarrow y = 6x + \beta \quad (\varepsilon)$$

Τέλος αφού το σημείο $M(1, -8)$ είναι σημείο της εφαπτομένης οι συντεταγμένες επαληθεύουν την εξίσωση (ε) . Δηλαδή,

$$-8 = 6 + \beta \Leftrightarrow \beta = -14$$

Άρα, $y = 6x - 14$.

Γ4. Για $x \geq 2 \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(x) \leq f(2) \Leftrightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Leftrightarrow$
 $2x^3 - 6x^2 + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}$ και $f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7, x \in \mathbb{R}$.

Όμως $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -4$

Δ2. Είναι $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}$ και $f'(x) = x^2 - 8x + 7$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 7,$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \text{ ή } x > 7,$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 7.$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f δίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$				
		T.M.	T.E.	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 1]$ και $[7, +\infty)$ ενώ γνησίως φθίνουσα στο $[1, 7]$.

43. Γνωρίζουμε ότι

- $7 < 2020 < 2025 \xrightarrow{f \nearrow} f(2020) < f(2025) \Leftrightarrow f(2025) - f(2020) > 0$
- $1 < \frac{3}{2} < \frac{5}{2} < 7 \xrightarrow{f \searrow} f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$

Άρα, $A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)} > 0$

44. Είναι $f''(x) = 2x - 8$.

Οπότε,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{3}^2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} [(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})] = -6 \cdot 2\sqrt{3} = -12\sqrt{3} \end{aligned}$$